המטריצה המייצגת

של העתקה לינארית

נניח כי U, V מרחבים וקטוריים, $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ בסיס של U, $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, v_m$ בסיס של V

$T: U \to V$ העתקה לינארית.

אזי $T(\bar{u}_1), T(\bar{u}_2), \dots, T(\bar{u}_n) \in V$, לכן ב אמצ

אמצם הוא צירוף לינארי של $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m$

נכתוב את הצירופים הלינאריים:

$$T(\bar{u}_1) = a_{11}\bar{v}_1 + a_{21}\bar{v}_2 + \dots + a_{m1}\bar{v}_m$$

$$T(\bar{u}_2) = a_{12}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2 + \dots + a_{m2}\bar{v}_m$$

$$\dots$$

$$T(\bar{u}_n) = a_{1n}\bar{v}_1 + a_{2n}\bar{v}_2 + \dots + a_{mn}\bar{v}_m$$

יהי וקטור שרירותי $\bar{u} \in U$, אז $\bar{u}$ הוא צירוף לינארי של $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$

$$\bar{u} = x_1 \cdot \bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{u}_n$$

כלומר

$$[\bar{u}]_{\{u_1, u_2, \dots, u_n\}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

נפעיל את T על וקטור $\bar{u}$

$$T(\bar{u}) = x_1 T(\bar{u}_1) + x_2 \cdot T(\bar{u}_2) + \dots + x_n \cdot T(\bar{u}_n)$$

$$= x_1 \cdot (a_{11}\bar{v}_1 + a_{21}\bar{v}_2 + \dots + a_{m1} \cdot \bar{v}_m) +$$
$$x_2 \cdot (a_{12}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2 + \dots + a_{m2}\bar{v}_m) +$$
$$\dots + x_n \cdot (a_{1n}\bar{v}_1 + a_{2n}\bar{v}_2 + \dots + a_{mn} \cdot \bar{v}_m)$$

Scanned with CamScanner

$$= (x_1 \cdot a_{11} + x_2 \cdot a_{12} + \dots + x_n \cdot a_{1n}) \cdot \bar{v}_1 +$$

$$(x_1 \cdot a_{21} + x_2 \cdot a_{22} + \dots + x_n \cdot a_{2n}) \cdot \bar{v}_2 +$$

$$\dots + (x_1 \cdot a_{m1} + x_2 \cdot a_{m2} + \dots + x_n \cdot a_{mn}) \cdot \bar{v}_m$$

$$[T(\bar{u})]_{\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}} = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n \cdot a_{1n} \\ x_1 a_{21} + x_2 \cdot a_{22} + \dots + x_n \cdot a_{2n} \\ \dots \\ x_1 \cdot a_{m1} + x_2 \cdot a_{m2} + \dots + x_n \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$[T]^{\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}}_{\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$ נסמן

המטריצה המייצגת של טרנספורמציה

ליניארית T לפי הבסיס $\{u_1, \dots, u_n\}$

$\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$!

כלומר:

$$[T]^{\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}}_{\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}} = \left([T(u_1)]_{\{v_1, \dots, v_m\}} \; [T(u_2)]_{\{v_1, \dots, v_m\}} \dots \right)$$

כיבלנו נוסחה!

$$[T(u)]_{\{v_1, \dots, v_m\}} = [T]^{\{v_1, \dots, v_m\}}_{\{u_1, \dots, u_n\}} \cdot [u]_{\{u_1, \dots, u_n\}}$$

Scanned with CamScanner

• אם בתור בסיס לוקחים את המסלים הסטנדרטיים למטריצה המייצגת קונים **המטריצה הסטנדרטית של הטרנספורמציה**

מסקנה: כל טרנספורמציה לינארית ניתן לתאר כמכפלה במטריצה.

דוגמה: נתון: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\bar{u}) = k \cdot \bar{u}$ לכל $u \in \mathbb{R}^2$

מצאו את המטריצה המייצגת הסטנדרטית של T:

פתרון: נבחר בסיס סטנדרטי של $\mathbb{R}^2$:

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(\bar{e}_1) = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2$$

$$T(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} = 0 \cdot \bar{e}_1 + k \cdot \bar{e}_2$$

לכן המטריצה הסטנדרטית היא

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

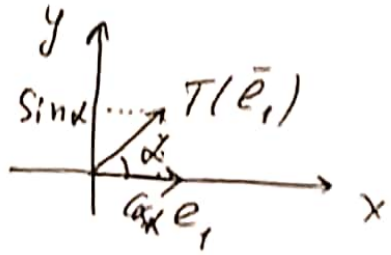
כ"ל לכל $\bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$T(\bar{u}) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

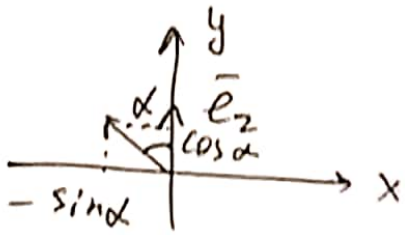
Scanned with CamScanner

דוגמה $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ סיבוב בזווית α

נבדוק כיצד הוא פועל.



$$T(\bar{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$



$$T(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$T(\bar{e}_1) = \cos\alpha \cdot \bar{e}_1 + \sin\alpha \cdot \bar{e}_2$$

$$T(\bar{e}_2) = -\sin\alpha \cdot \bar{e}_1 + \cos\alpha \cdot \bar{e}_2$$

לכן המטריצה המייצגת היא:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

כלומר לכל וקטור $\bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ע"י

לחשוב את הקואורדינטות של הוקטור $T(\bar{u})$

אמר המטריצה

$$T(\bar{u}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

דוגמה: $T: P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$

$T(p(t)) = p'(t)$ (גזירה)

$\{1, t, t^2, t^3\}$ הבסיס הסטנדרטי של $P_3(\mathbb{R})$

$\{1, t, t^2\}$ הבסיס הסטנדרטי של $P_2(\mathbb{R})$

$$T(1) = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2$$

$$T(t) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2$$

$$T(t^2) = 2t = 0\cdot 1 + 2\cdot t + 0\cdot t^2$$

$$T(t^3) = 3t^2 = 0\cdot 1 + 0\cdot t + 3\cdot t^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ — המטריצה המייצגת

לכן

$$\left[T(a+bt+ct^2+dt^3)\right]_{\{1,t,t^2\}} = A\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 3d \end{pmatrix} =$$

$$= \left[(a+bt+ct^2+dt^3)'\right]_{\{1,t,t^2\}}$$

Scanned with CamScanner

פתרון

$$T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2a-b & c \\ 0 & 0 & 3d \end{pmatrix}$$

לפי הבסיס הסטנדרטי $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

לפי הבסיס הסטנדרטי $E_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, E_6' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$T(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\cdot E_1' + 2\cdot E_2' + 0\cdot E_3' + \dots + 0\cdot E_6'$$

$$T(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\cdot E_1' + (-1)\cdot E_2' + \dots + 0\cdot E_6'$$

$$T(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\cdot E_1' + 0\cdot E_2' + 1\cdot E_3' + \dots + 0\cdot E_6'$$

$$T(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0\cdot E_1' + \dots + 3\cdot E_6'$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner